4/5/20

Πχ

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί κανονική μορφή Smith

$M_3(\mathbb{Z})$ $R \to \mathbb{Z}$

α΄ τρόπος

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_3 \to \Sigma_3 + 3\Sigma_1]{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - 2\Sigma_1}$$

Δεν μπορώ $\Gamma_2 \leftrightarrow \frac{1}{3}\Gamma_2$ γιατί $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$!!!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 9\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Sigma_3 \to \Sigma_3 + 3\Sigma_2} \underset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}}$$

β' τρόπος → αντιστρέψιμο του $\mathbb{Z}$ (± 1 εδώ)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$ Το 1 διαιρεί το $3, -1, -4, 9$

$a = 3$, $\beta = -1$

$\mu\kappa\delta(a, \beta) = \mu\kappa\delta(3, 1) = 1$

$1 = 3 \cdot \underset{x}{1} + (-1)\underset{y}{2}$ ← είναι μοναδική?

$a' = \frac{a}{\delta} = \frac{3}{1} = 3$

$\beta' = \frac{\beta}{\delta} = -\frac{1}{1} = -1$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 14\Gamma_2} \underset{A_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}}$$

μκδ

Οι πίνακες A_1, A_2 είναι ίδιοι ώς προς αντιστρεψιμότητα των στοιχείων της διαγωνίου.

Θεώρημα Έστω M R-μόδιο και $M_1, \dots, M_k \leq M$ με $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$.

Έστω $N_1 \leq M_1$, $N_2 \leq M_2$, …, $N_k \leq M_k$ με $N = N_1 + \dots + N_k$

Τότε:

α) $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$

β) $M/N = \pi(M_1) \oplus \dots \oplus \pi(M_k)$, όπου π ο φυσικός επιμορφισμός $\pi: M \to M/N$

γ) $\boxed{M/N \simeq M_1/N_1 \oplus \dots \oplus M_k/N_k}$

$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$

<u>αποδ</u>

α) $\underbrace{N_i \cap \sum_{i\neq j} N_j}_{=\{0\}} \leq M_i \cap \sum_{i \neq j} M_j = \{0\}$

$\pi : M \to M/N$

β) Καθώς $M = M_1 + \dots + M_k$

$\Rightarrow$ παρατ. ότι $M/N = \pi(M_1) + \dots + \pi(M_k)$

καθώς έστω τυχαίο $m + N \in M/N$

λόγω του επί $\exists\, m \in M : \pi(m) = m + N$

Αλλά $\underset{\Psi}{M} = M_1 + \dots + M_k$ άρα $\pi(m) = (m_1 + \dots + m_k) + N$

$m = m_1 + \dots + m_k$

$= (\underset{\pi(M_1)}{m_1} + N) + \dots + (\underset{\pi(M_k)}{m_k} + N) \quad \pi(M_1) + \dots + \pi(M_k)$

Προφανώς και αντίστροφα

$(m_1 + N) + \dots + (m_k + N) = (m_1 + \dots + m_k) + N$

$= \pi(M) = m + N \in M/N$

"Ευθύ"

Έστω $x \in \pi(M_i) \cap \sum_{i\neq j} \pi(M_j)$

$x = \pi(m_i)$

$x = \sum_{i \neq j} \pi(m_j) \quad , m_j \in M_j$

$\pi : M \to M/N$

$m \mapsto \pi(m) = m + N$

$\pi(m_i) = \sum_{i\neq j} \pi(m_j) \Rightarrow \pi(m_1) + \pi(m_2) + \dots + \pi(m_{i-1})$

$+ \pi(-m_i) + \pi(m_{i+1}) + \dots + \pi(m_k) = 0$

$\Rightarrow (m_1 + N) + \dots + (m_{i-1} + N) + (-m_i + N) + (m_{i+1} + N) + \dots + (m_k + N)$

$= 0 + N$

$\Rightarrow (m_1 + \dots + m_{i-1} + (-m_i) + m_{i+1} + \dots + m_k) + N = 0 + N$

$\Rightarrow m_1 + \dots + m_{i-1} + (-m_i) + \dots + m_k \in N = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$

$= n_i + \dots + n_k \; , \; n_i \in N_i$

$= \sum n_i$, η γραφή είναι μοναδική!

$\Rightarrow m_\lambda = n_\lambda \; , \; \forall \lambda = 1, \dots, k$

$\Rightarrow m_\lambda \in N_\lambda \ , \forall \lambda = 1, \dots, k \Rightarrow m_\lambda + N_\lambda = 0 + N_\lambda \ , \forall \lambda$

$\Rightarrow \pi(m_\lambda) = 0 + N \ , \forall \lambda = 1, \dots, k.$

$x = \pi(m_j) = 0 + N$, για κάποιο j

δ.ο. $M/N \simeq \pi(M_1) \oplus \dots \oplus \pi(M_k)$

γ) Δδο $M/N \simeq M_1/N_1 \oplus \dots \oplus M_k/N_k$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

αφού η $\pi : M_i \to M_i/N_i$ είναι επί

$\overset{\text{op}}{\Leftrightarrow} M_i/N_i = \pi(M_i)$ εφαρμόζοντας αυτό στο β)

έπεται το γ).

$M/N \simeq M_1/N_1 \to Ann(M_i) \to \langle d_i \rangle \quad \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

Θεώρημα Ανάλυσης Μοδίων:

Έστω R ΠΚΙ και $M \neq 0$ πεπερασμένα παραγόμενο R-μόδιο. Τότε, υπάρχουν μη μηδενικά κυκλικά R-υπομόδια $M_1, \dots, M_k$ του M έτσι ώστε

i) $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$

ii) $d_1 | d_2 | d_3 | \dots | d_k$ όπου $Ann(M_i) = \langle d_i \rangle$

R^n

$M_i \simeq R/Ann(M_i)$

αποδ.

i) Είδαμε προηγουμένως

$\exists$ επιμορφισμός R-μοδίων $\varphi : F \to M$ (ελεύθερο F)

$\xrightarrow[\text{ισομορφ}]{\text{1ο θεωρ}} F/\ker\varphi \simeq M \quad (\mathrm{im}\varphi = M)$

F ελεύθερο $\{f_1, \dots f_t\}$ βάση $\to F = \langle f_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle f_t \rangle$

και $\ker\varphi \leq F$ και αν $d_1, \ldots, d_k \in R$ με $d_1 | \ldots | d_t$
έτσι ώστε $\{d_1 f_1, \ldots, d_t f_t\}$ είναι βάση
$\ker\varphi = \langle d_1 f_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle d_t f_t \rangle$

Από προηγ. θεώρημα
$F/N \simeq \langle \pi(f_1) \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \pi(f_t) \rangle$
όπου $\pi : F \to F/N$
άρα $M = \varphi(\langle \pi(f_1) \rangle) \oplus \ldots \oplus \varphi(\langle \pi(f_t) \rangle)$
Μένει νδο $Ann(\varphi(\langle \pi(f_i) \rangle)) = \langle d_i \rangle$
$d_1 | d_2 | \ldots | d_t$ μας το έχει δώσει το θεώρημα βάσεων!

Έστω $x \in Ann(\varphi(\langle \pi(f_i) \rangle))$
$\varphi : F \to M$ επι
$F/\ker\varphi \simeq M$

$M \underset{\pi}{\simeq} N$
$Ann(M) = Ann(N)$
$Ann M = Ann \varphi(M)$
$\parallel$
M

$x \in Ann(\varphi(\langle \pi(f_i) \rangle))$
$\Updownarrow$ φ ισομ.
$x \in Ann(\langle \pi(f_i) \rangle)$
$\Updownarrow$ R ΠΚΙ

$Ann(\langle m \rangle)$
$\parallel$
$Ann(m)$

$x \in Ann(\pi(f_i))$
$\Updownarrow$ ορ.
$\underset{R}{\overset{}{x}} \cdot \pi(f_i) = 0 \overset{\pi}{\underset{R\text{ ομ.}}{\Longleftrightarrow}} \pi(x f_i) = 0$
$\pi : F \to F/N = F/\ker\varphi$
$\pi(x f_i) \in F/N$
$\Leftrightarrow \pi(x f_i) = 0 + N$
$\Leftrightarrow x f_i + N = 0 + N$
$\Leftrightarrow x f_i \in N (= \ker\varphi) \rightsquigarrow d_1 f_1, \ldots, d_t f_t$
$\Leftrightarrow x f_i = k_1 d_1 f_1 + \ldots + k_t d_t f_t$
τα f_i είναι Γ.Α. (βάση του F)
άρα (μοναδικότητα γραφής)
$\Rightarrow x = d_i f_i \Rightarrow x \in \langle d_i \rangle$

Παρατηρήσεις !

① $d_1 | \dots | d_t$

α) Άρα, αν $d_i = 0 \Rightarrow d_i = d_{i+1} = d_{i+2} = \dots = d_t = 0$

β) άρα $\underset{\substack{\| \\ Ann(\langle d_t \rangle)}}{Ann(M_t)} \subseteq Ann(M_{t-1}) \subseteq \dots \subseteq \underset{\substack{\| \\ Ann(\langle d_1 \rangle)}}{Ann(M_1)}$

② Δ.ο. για κάθε κυκλικό μόδιο M_i, ότι $M_i = R/Ann(M_i)$

(αν $Ann M_i = 0 \Rightarrow M_i \simeq R$)

$x \in Ann(M_t) = \underset{\substack{\| \\ Ann(d_t)}}{Ann(\langle d_t \rangle)}$

$\Rightarrow x d_t = 0$

$d_i | d_t \Rightarrow d_t = d_i \cdot r$

$\Rightarrow x d_i \cdot r = 0 \Rightarrow x \in Ann(d_i)$

$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$

$= R/_{Ann M_1} \oplus \dots \oplus R/_{Ann M_k} =$

$= R/\langle d_1 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle d_k \rangle \quad \dfrac{\text{για όλα}}{\text{τα } d_i = 0}$

$= R/\langle d_1 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle d_{i-1} \rangle \oplus R/\langle d_i \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle d_t \rangle$

$\simeq R/\langle d_1 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle d_{i-1} \rangle \oplus \underbrace{R \oplus \dots \oplus R}_{\text{όσα μηδενικά } d_i}$

όπου $d_1 | d_2 | \dots | d_{i-1}$.

Εφαρμογή (Θεώρημα Ταξινόμησης πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων)

Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα

Υπάρχουν $d_1, \dots, d_t \in \mathbb{Z}^+$ με $d_1 | d_2 | \dots | d_t$

έτσι ώστε $G \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_t} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$

Αν επιπλέον, η G πεπερασμένη δεν υπάρχουν οι όροι $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_t}$

αποδ G αβελιανή $\Rightarrow$ είναι $\overset{R}{\mathbb{Z}}$-μόδιο

Παρ② $G \simeq R/\langle d_1 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle d_\lambda \rangle$

$\simeq \mathbb{Z}/\langle d_1 \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/\langle d_\lambda \rangle$, $d_1 | \dots | d_\lambda$

$\simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_m} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ για όλα τα

$m < \lambda$ $\quad$ $d_{m+i} = 0$

Πχ Να γίνει η ταξινόμηση των αβελιανών ομάδων τάξης 24.

$G \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_t}$ ~~Χ~~ αθροιστέους $\mathbb{Z}$

G αβελιανή, άρα $\mathbb{Z}$-μόδιο γιατί G πεπερασμένη

όπου $d_1 | d_2 | \dots | d_t$

και $24 = d_1 \cdot d_2 \dots d_t$

διαιρ 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$,

το 2 διαιρεί το 12 $\quad$ το 2 διαιρεί το 2 διαιρεί το 6

Δεν μπορώ να έχω $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8$ (το $2 \nmid 3$)